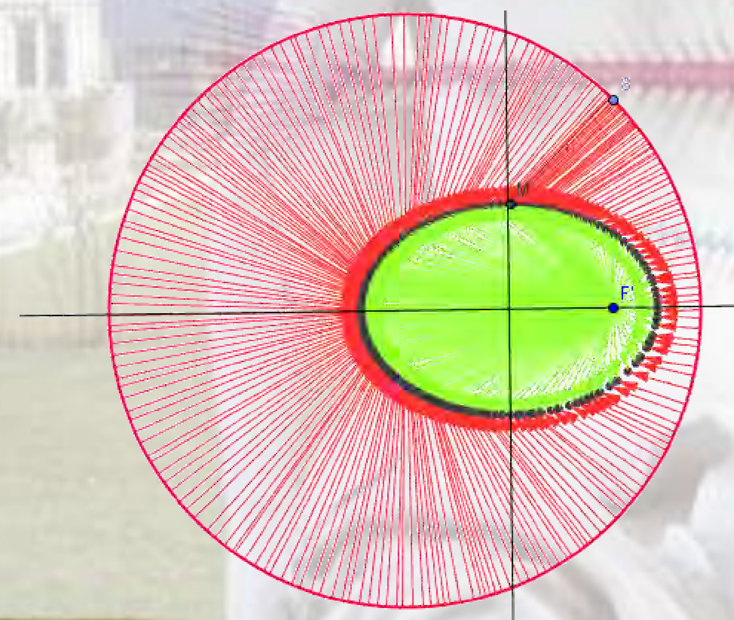
LABORATORIO DE ANATOMÍA ANIMAL

INGENIERIA INVERSA APLICADA A LA ANATOMÍA ANIMAL

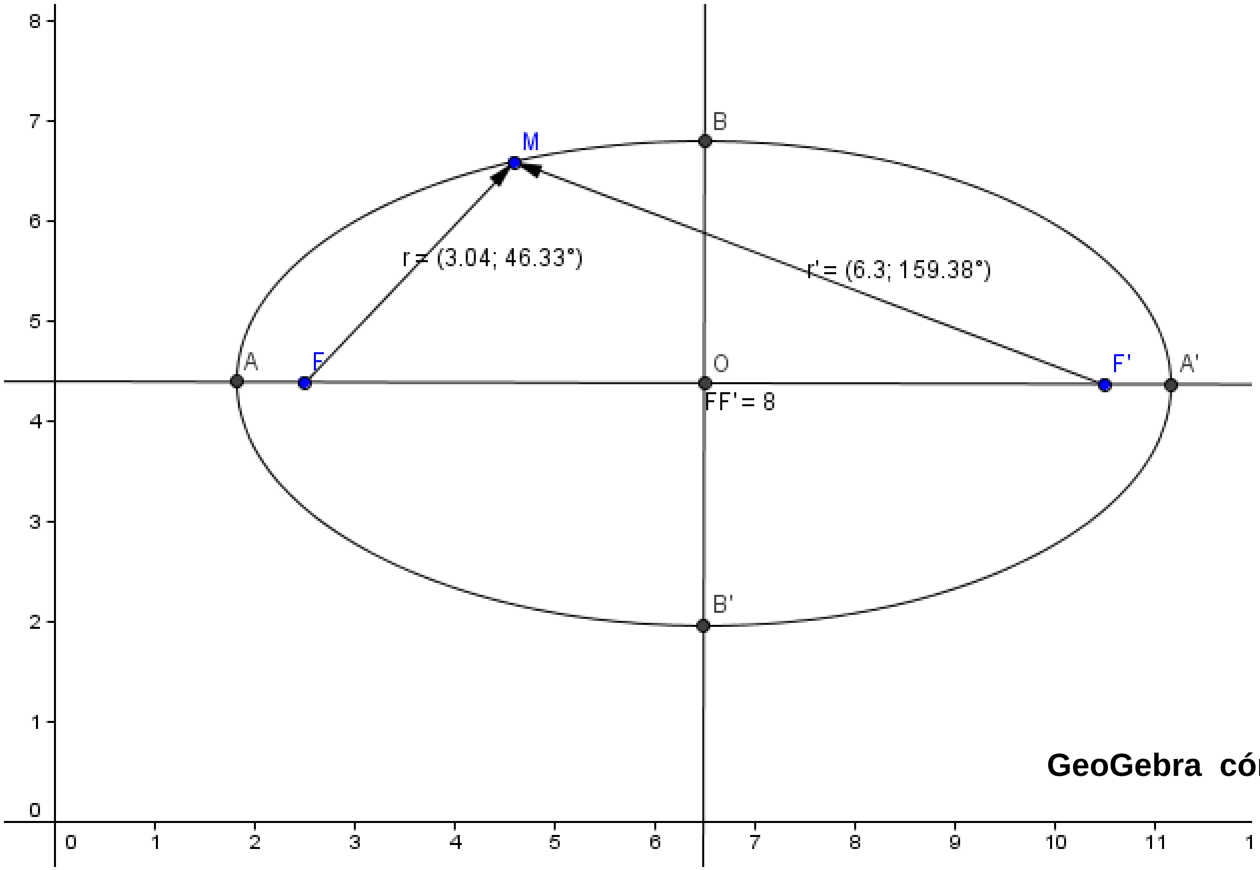
M O O C



6.-Las cónicas

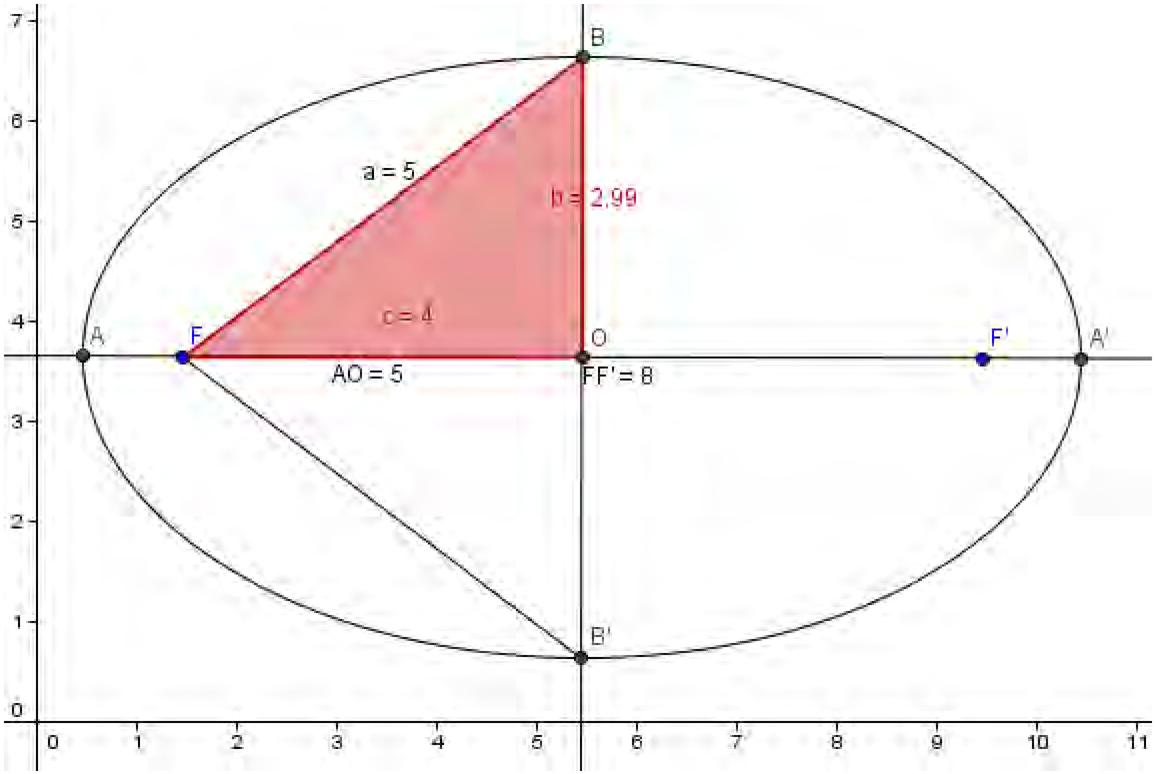
Descargar plantillas MOOC_006_plantillas.zip

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F’ llamados **focos** es constante. Cualquier punto M de la elipse verifica MF+MF’ = 2a y es siempre mayor que la **distancia focal** FF’=2c. Las distancias MF y MF’ se llaman **radios vectores** del punto M. La recta FF’ es denominada **eje focal** y junto a la mediatriz BB’ constituyen los **ejes principales** de la curva, siendo **ejes de simetría** de la misma. El punto medio O de FF’ es el **centro** de la curva. Los puntos A y A’ del eje focal cumplen que OA=OA’ =a y se denominan **vértices de la elipse**. En efecto al ser puntos de la curva AF+AF’=2a y A’F+A’F’=2a.



GeoGebra cónicas_10.ggb

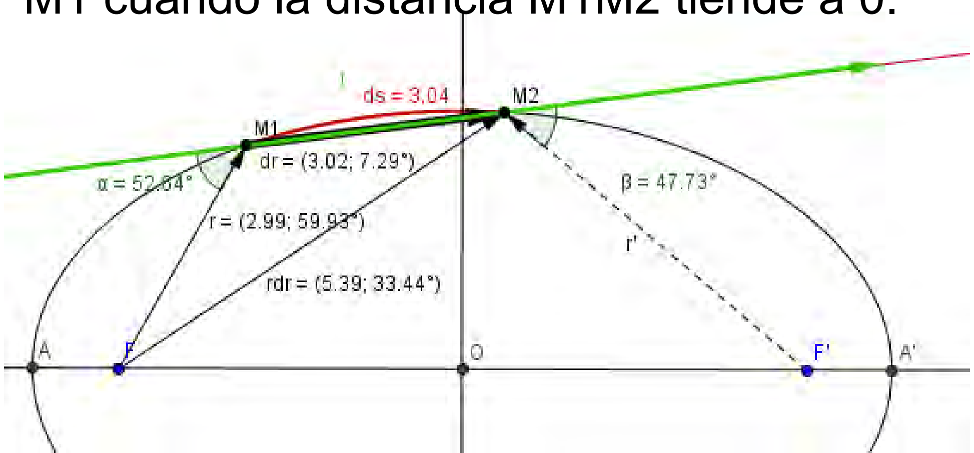
Al ser BB’ < BF+B’F =2a=AA’ a las magnitudes BB’ y AA’ se les conoce como **eje menor** y **eje mayor** respectivamente de la curva. En el triángulo OBF se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$, relación entre los semiejes y distancia focal. c/a = e se denomina **excentricidad de la curva** y al ser c<a e es siempre <1. Cuanto mayor es la excentricidad más achatada es la elipse, acercándose los focos a los vértices. Si e es igual a 0 la elipse se convierte en un círculo en el que los focos se confunden con el centro.

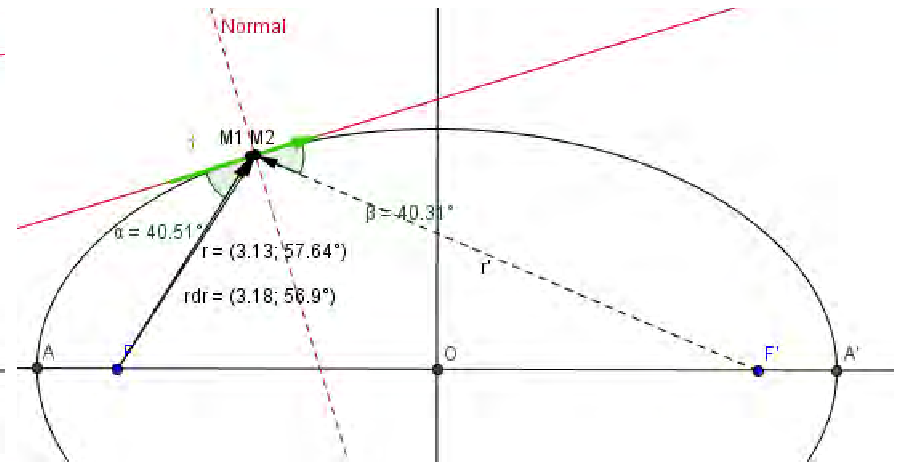


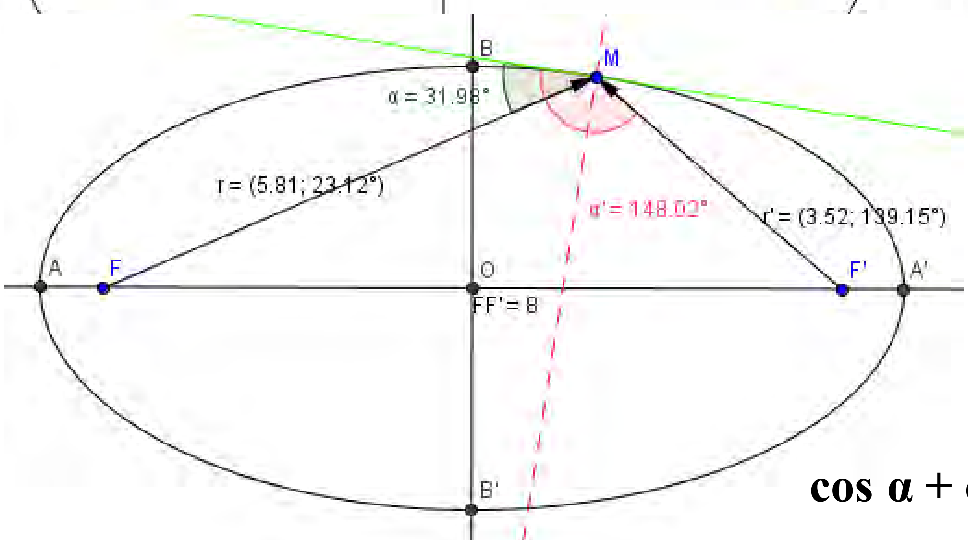
GeoGebra cónica_11.ggb

Tangente a la elipse en uno de sus puntos

Si consideramos dos puntos próximos M1 y M2 de una elipse de radios vectores $\vec{r}$ y $\vec{r} + d\vec{r}$ forman un triángulo FM1M2, uno de cuyos lados M1M2= $d\vec{r}$. La longitud M1M2 medida sobre el arco de la curva es ds. El cociente $d\vec{r}$ **/** ds = $\vec{t}$ que es un vector de módulo unidad cuya dirección es la de la tangente a la curva en M1 cuando la distancia M1M2 tiende a 0.



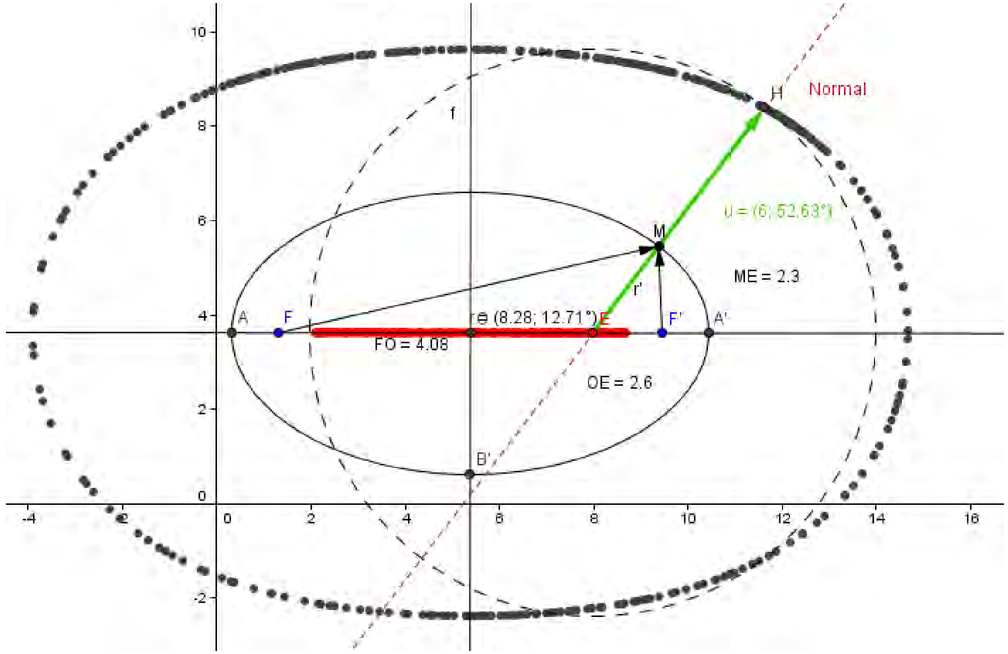


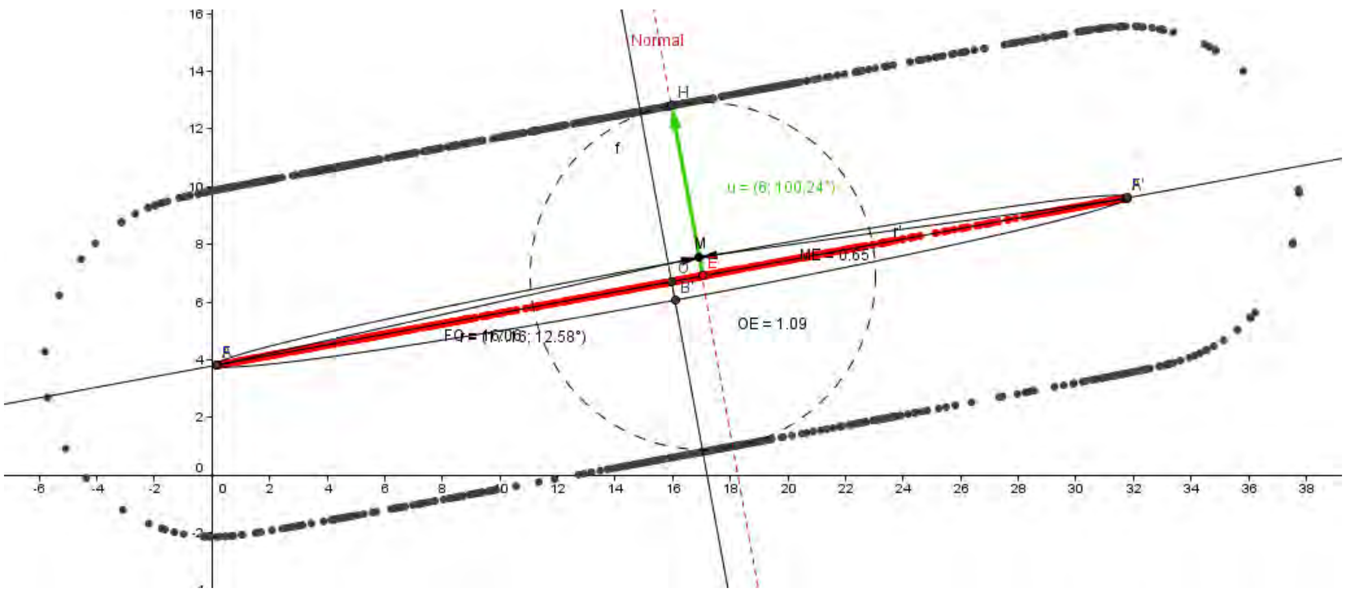


GeoGebra cónica_12.ggb

La **tangente en M** a una elipse forma ángulos iguales (α) con los radio vectores del punto M. La **normal** a la elipse **en el punto M** es la bisectriz del ángulo (α') de los radio vectores.

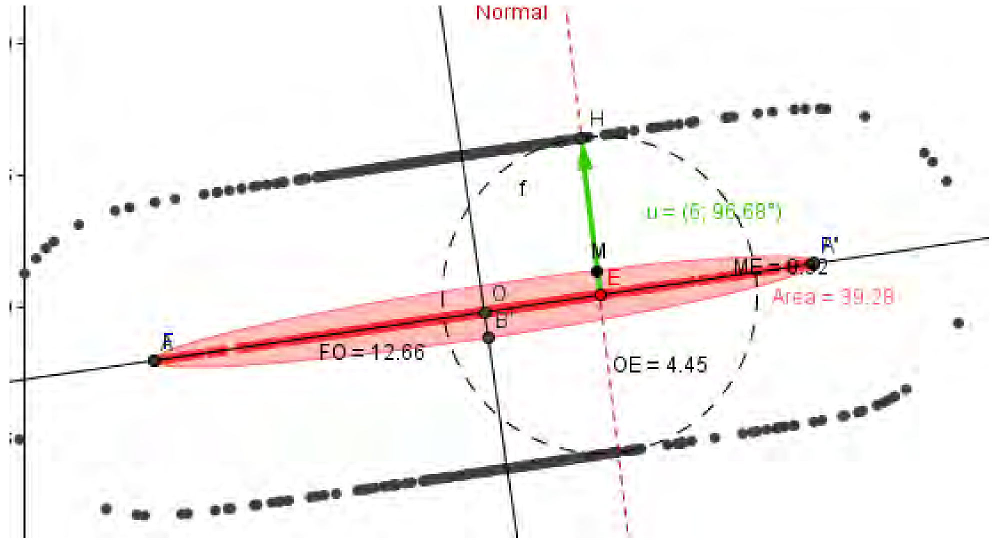
$$\cos \alpha + \cos \alpha' = 0$$

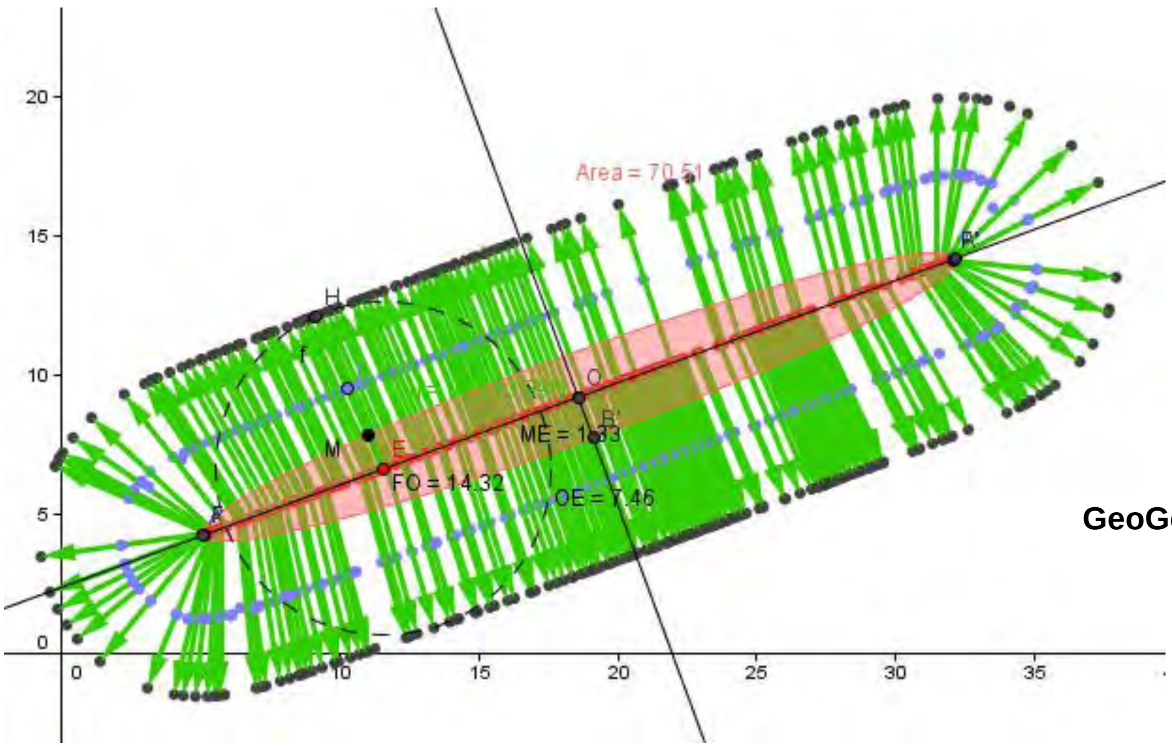




GeoGebra cónica_13.ggb

Patrón-01

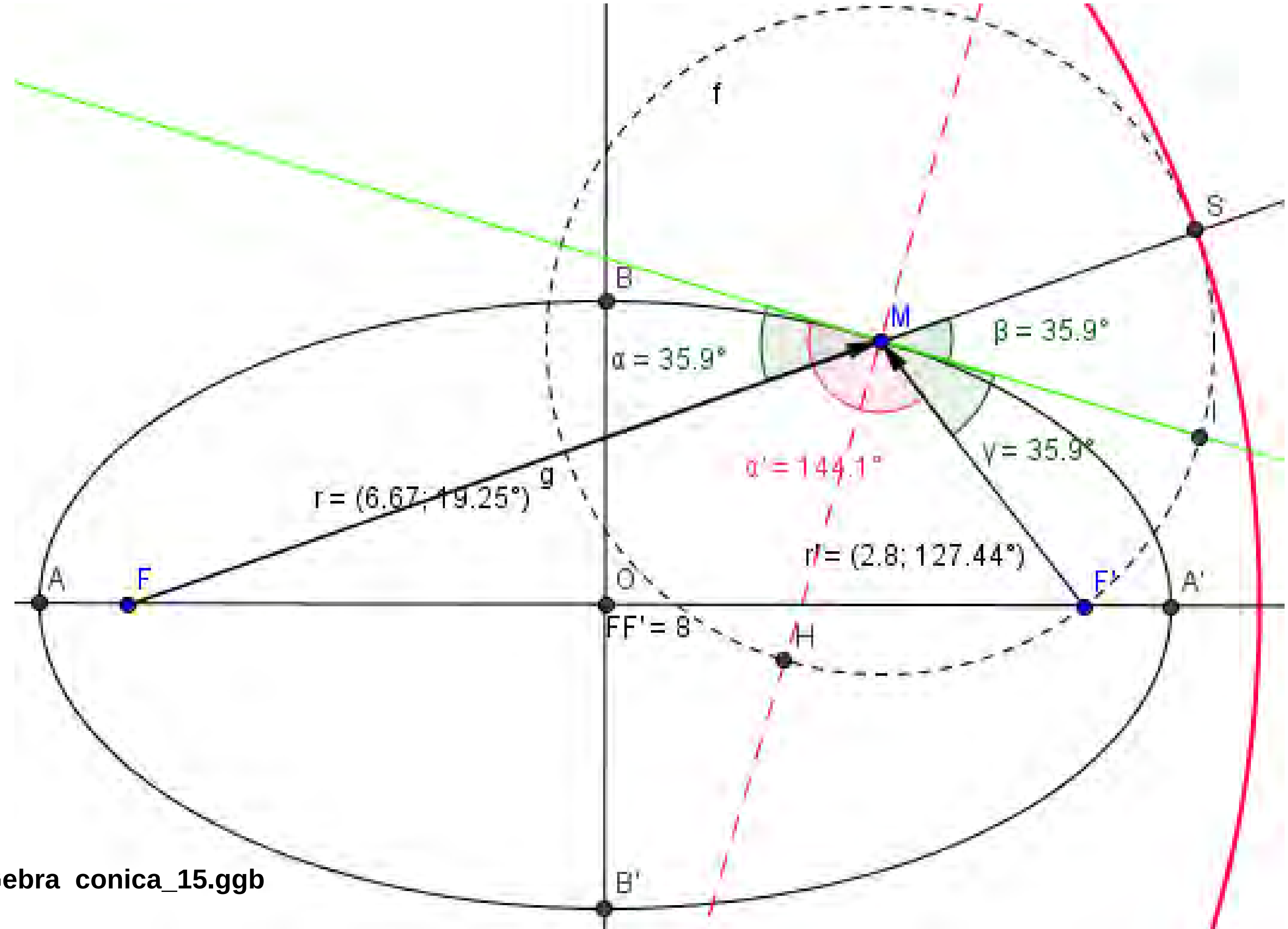




GeoGebra Cónica_14.ggb

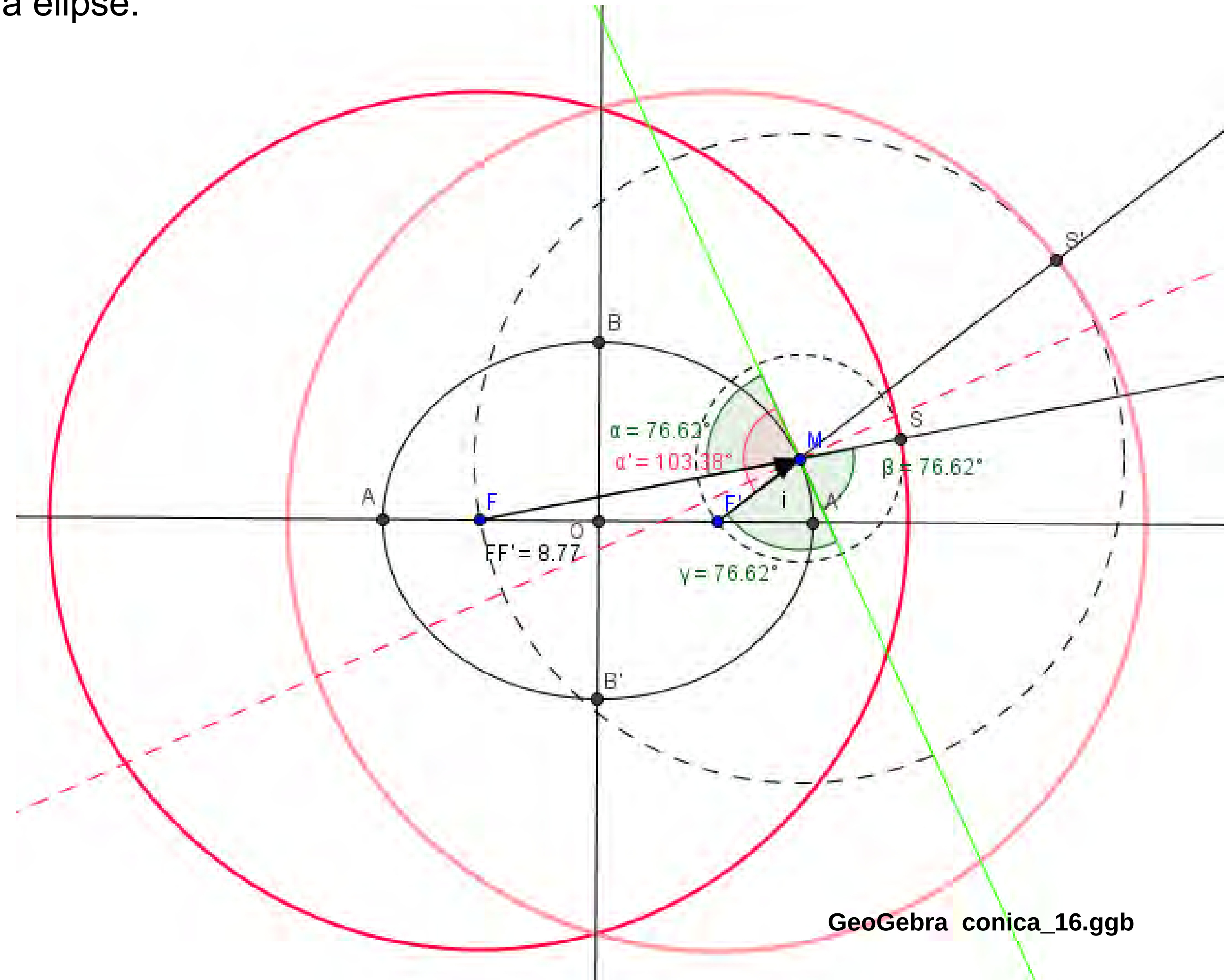
Círculos directores focales

S (punto simétrico de F’) está en un círculo (en rojo) de radio 2a y centro F, este círculo se denomina **círculo director del foco F** o **círculo focal de F**. Existen dos círculos focales: uno con centro en F y otro con centro en F’.



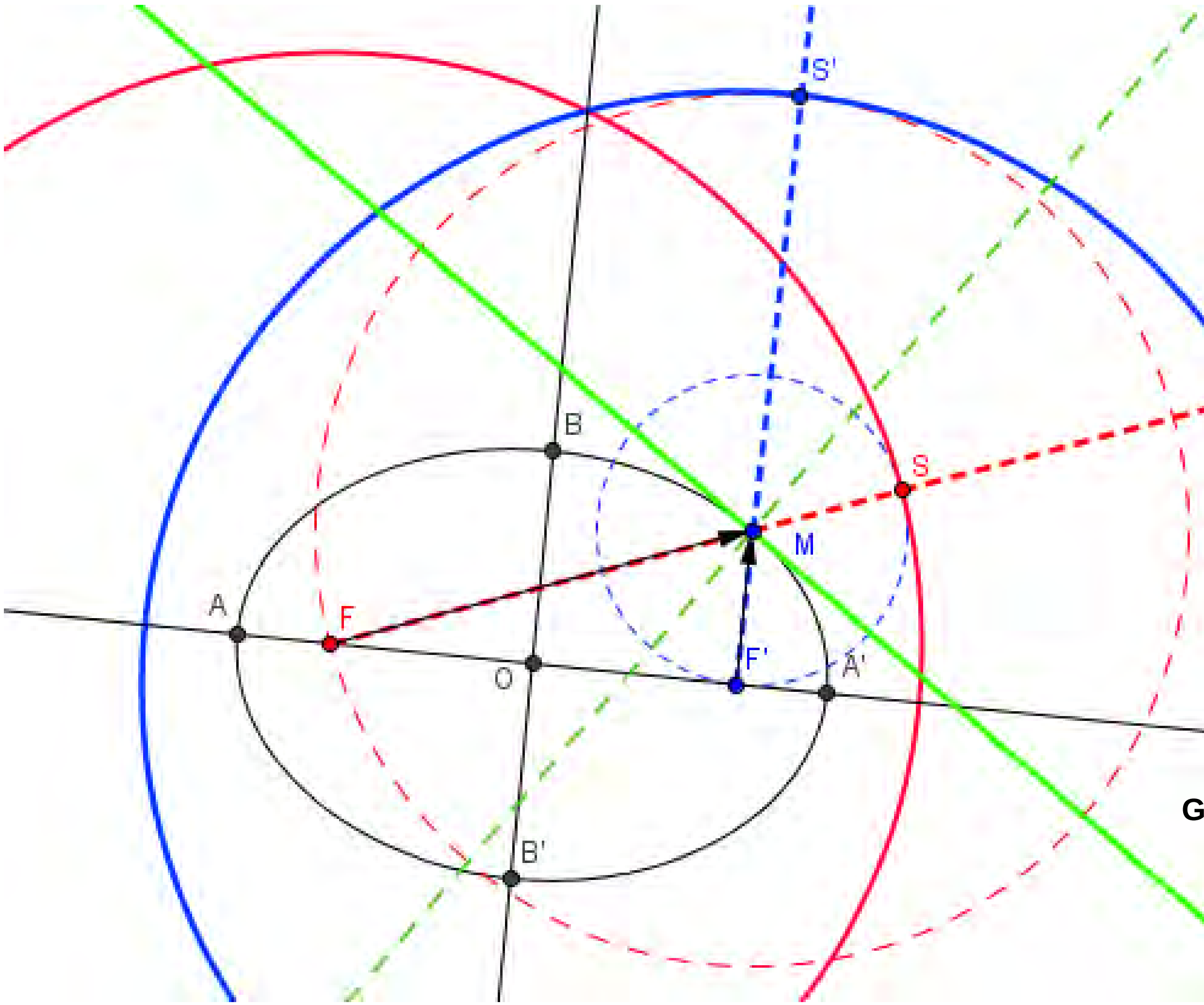
GeoGebra conica_15.ggb

Los círculos focales se cortan en la recta que pasa por BB', eje menor de la elipse.



GeoGebra conica_16.ggb

La circunferencia de centro M y radio MS pasa por F’ y es tangente al círculo director del otro foco F (en rojo).

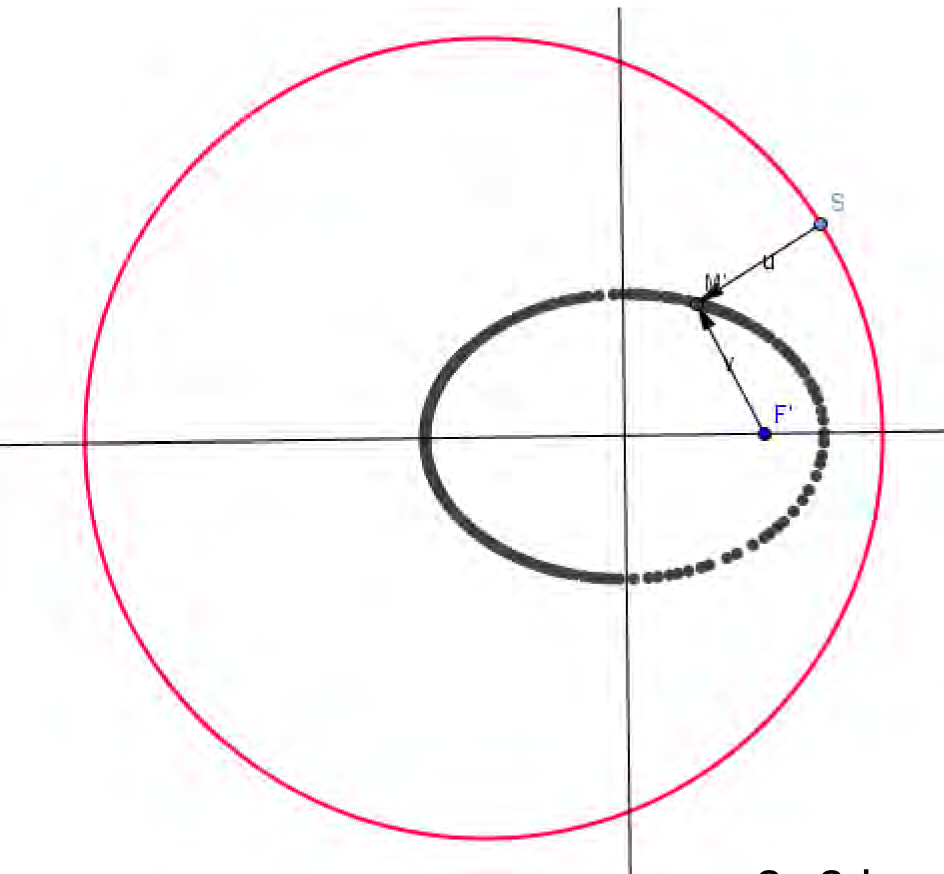


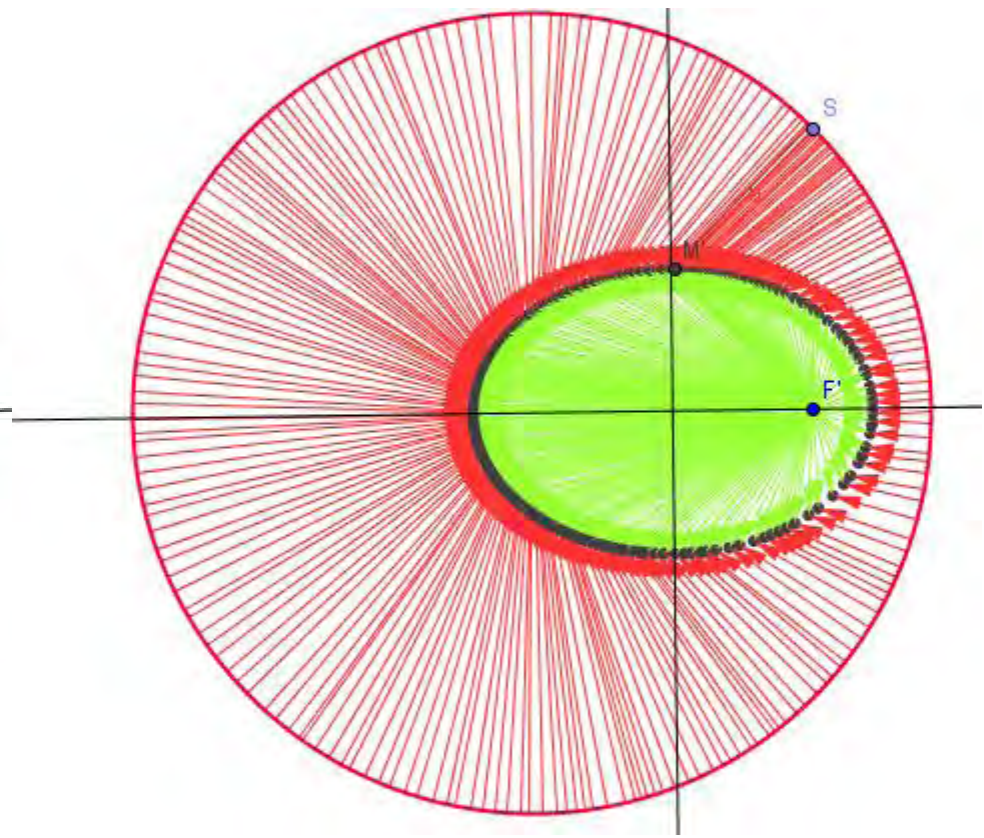
Las tangentes (en verde) en los vértices AA’BB’ forman un rectángulo circuscrito a la elipse.

GeoGebra conica_17.ggb

La elipse puede definirse también como lugar geométrico de los puntos que equidistan de un círculo (en rojo) y de un punto interior a ese círculo (F’). El módulo del vector u es igual al del vector v para cada posición del punto S.

Patrón-02

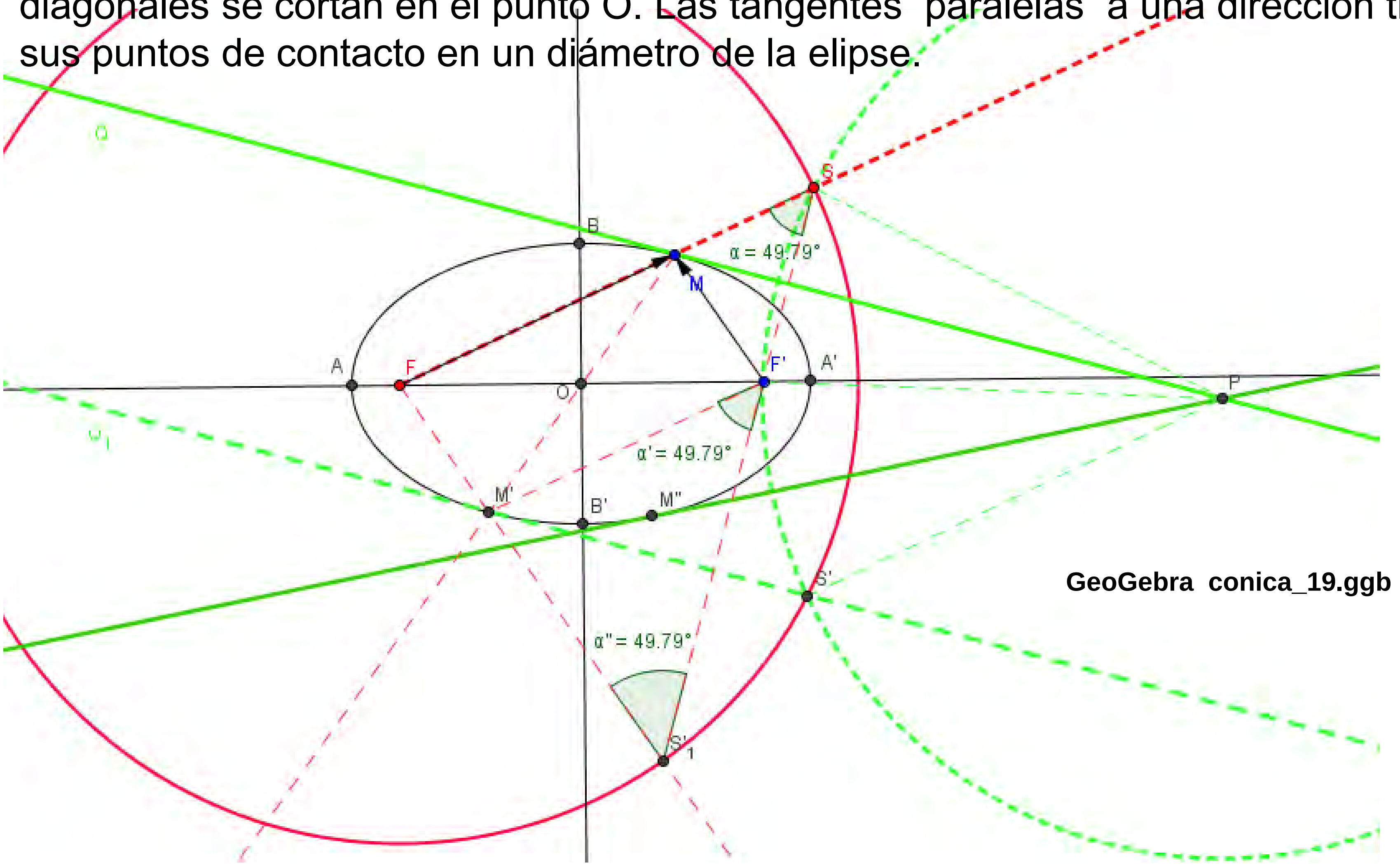




GeoGebra conica_18.ggb

Tangentes a la elipse desde un punto exterior:

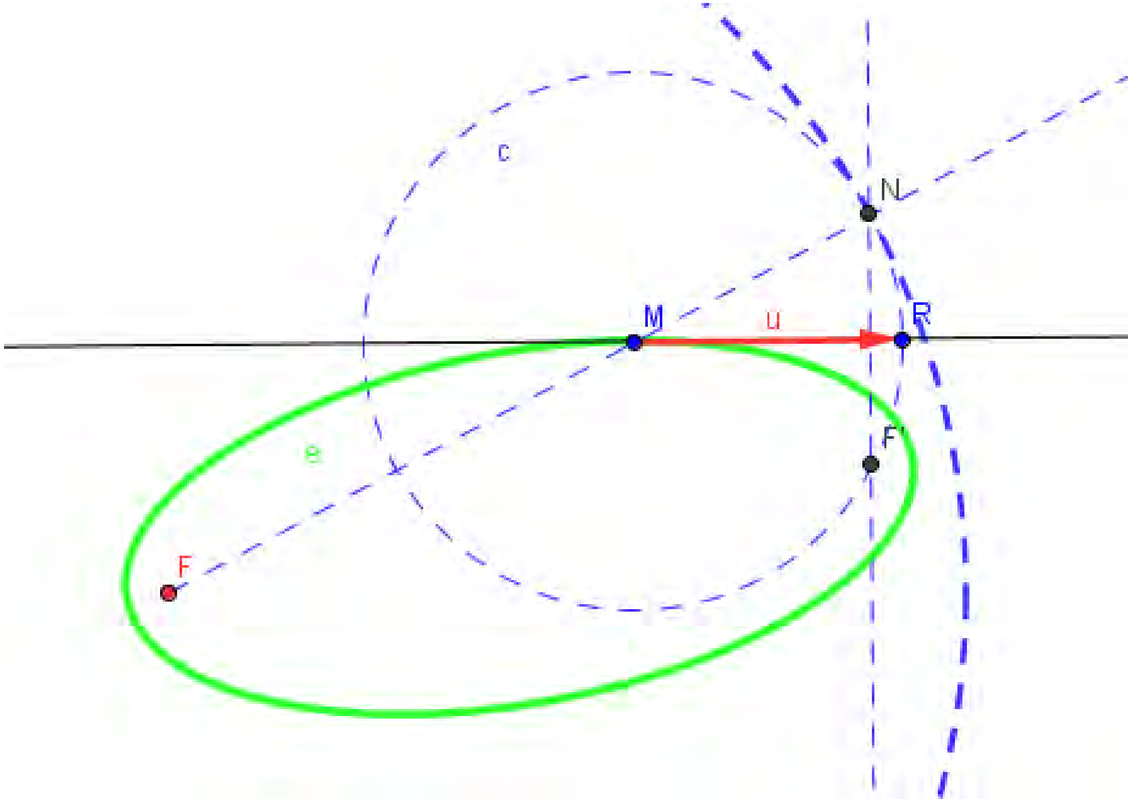
Siendo P el punto exterior, un círculo de centro P y radio PF’ cortará al círculo director de F (en rojo) en dos puntos S y S’ . Las mediatrices (en verde) de los ángulos F’ PS y F’PS’ son las tangentes a la elipse. El cuadrilátero FMF’M’ es un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto O. Las tangentes paralelas a una dirección tienen sus puntos de contacto en un diámetro de la elipse.



GeoGebra conica_19.ggb

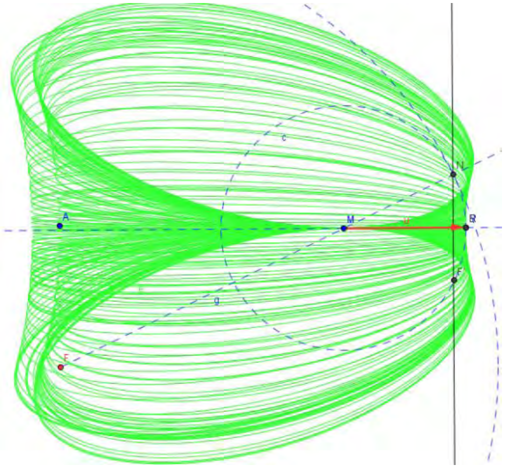
Intersección de una elipse con una recta:

Dada una recta (R) y uno de sus puntos de intersección con la elipse (M) consideramos a la curva como lugar geométrico de los centros de los círculos (C) que pasando por un foco (F') equidistan del círculo director del otro foco (F).



GeoGebra conica_20.ggb

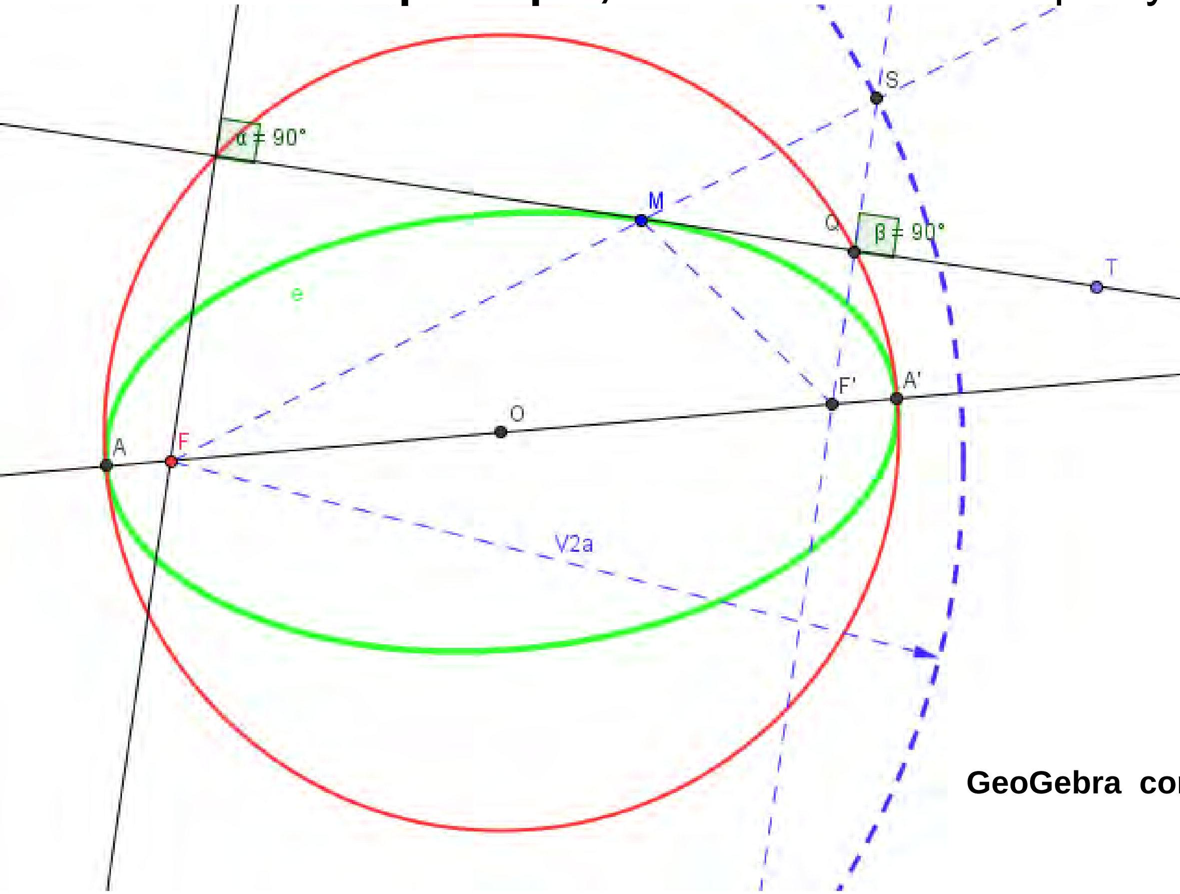
Patrón-03



GeoGebra conica_21.ggb

La circunferencia principal:

Los simétricos S de un foco F’ respecto de las tangentes MT a una elipse pertenecen al círculo director del otro foco F. El punto Q de intersección de F’S con MT es la proyección de F’ sobre esa tangente MT, siendo F’Q=QS. Como OF = OF’, los triángulos FSF’ y OQF’ son semejantes con razón de semejanza 2. Por lo que OQ=FS/2 =a. Por tanto el lugar geométrico de las proyecciones de los focos de una elipse sobre las tangentes a la curva es una circunferencia (en rojo),que se llama **circunferencia principal,** de centro el de la elipse y de radio a.

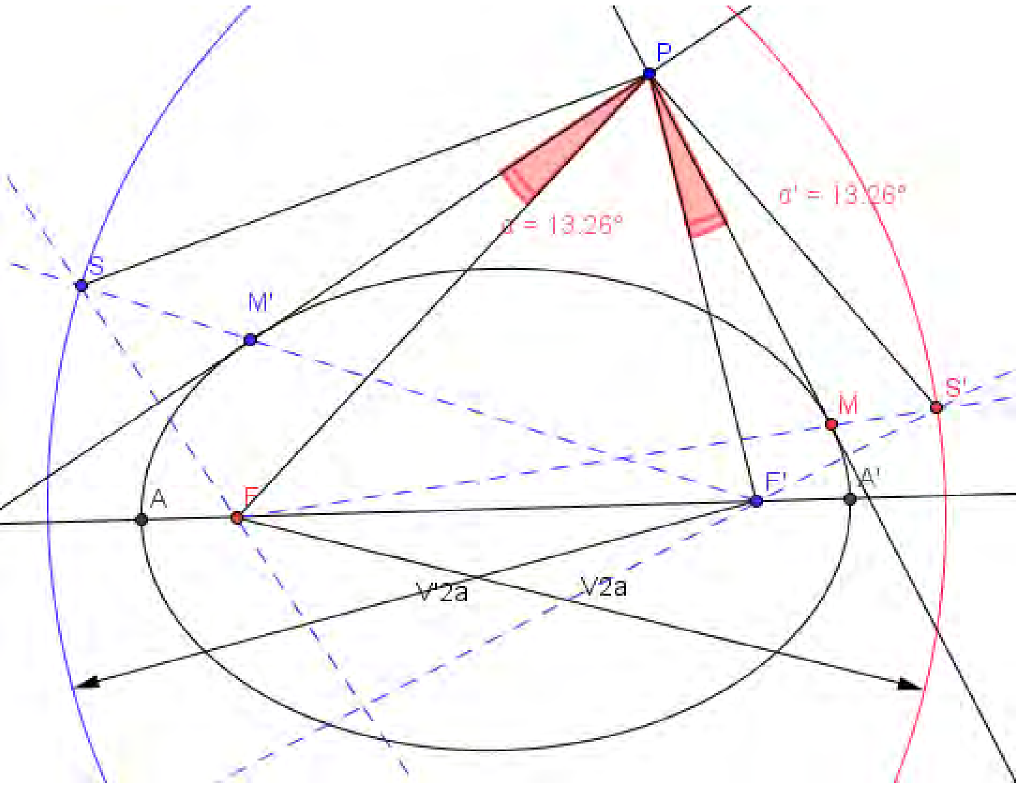


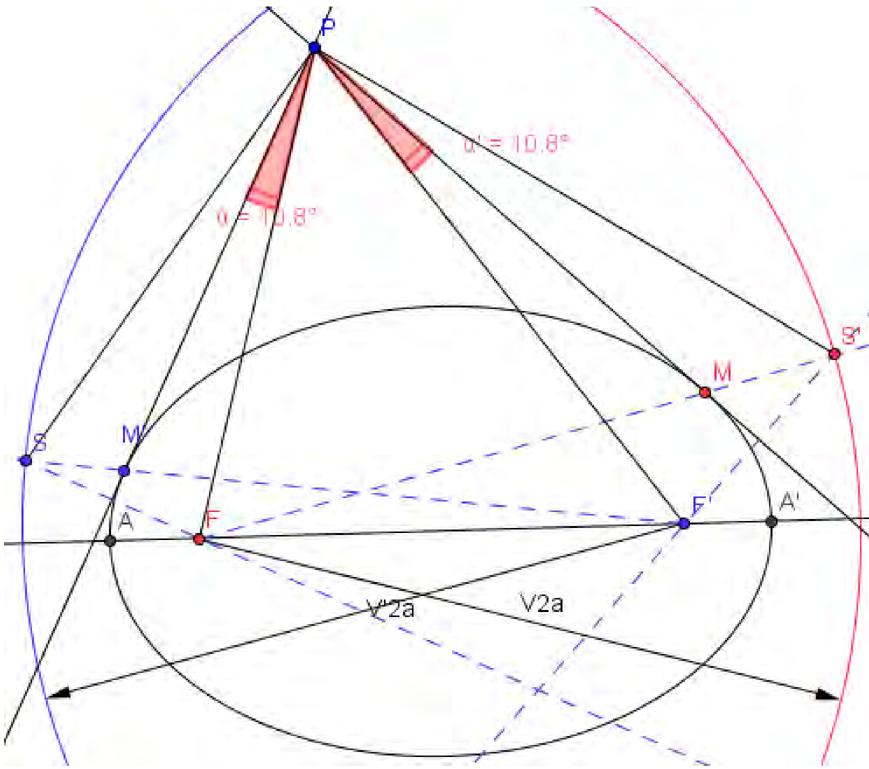
La circunferencia principal puede utilizarse para trazar las tangentes a la elipse desde un punto T exterior a la curva al ser recto el ángulo F’QT

GeoGebra conica_22.ggb

Teoremas de Poncelet en la elipse:

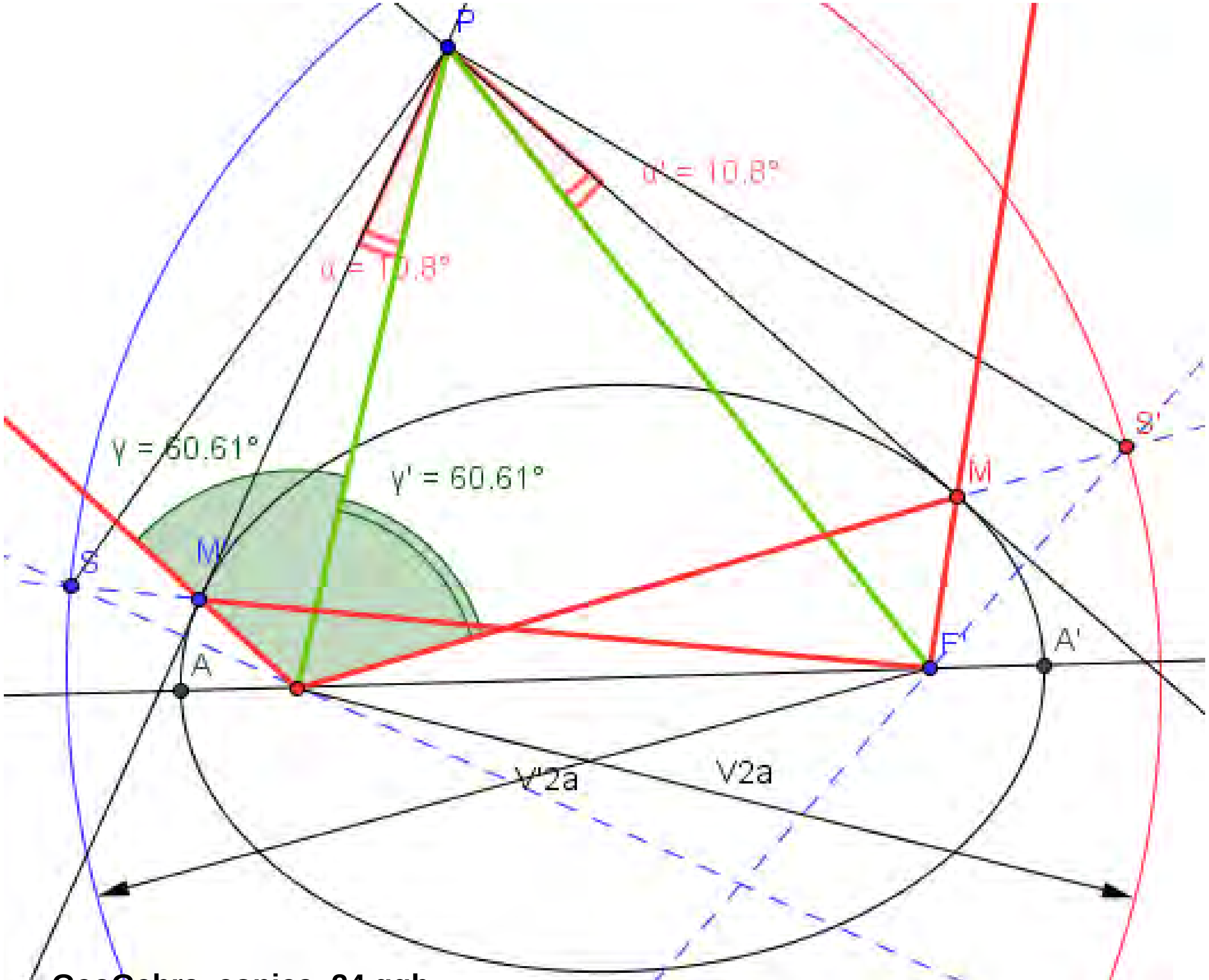
1º teorema: Las tangentes trazadas desde un punto P a una elipse forman ángulos iguales con las rectas que unen el punto P con los focos.





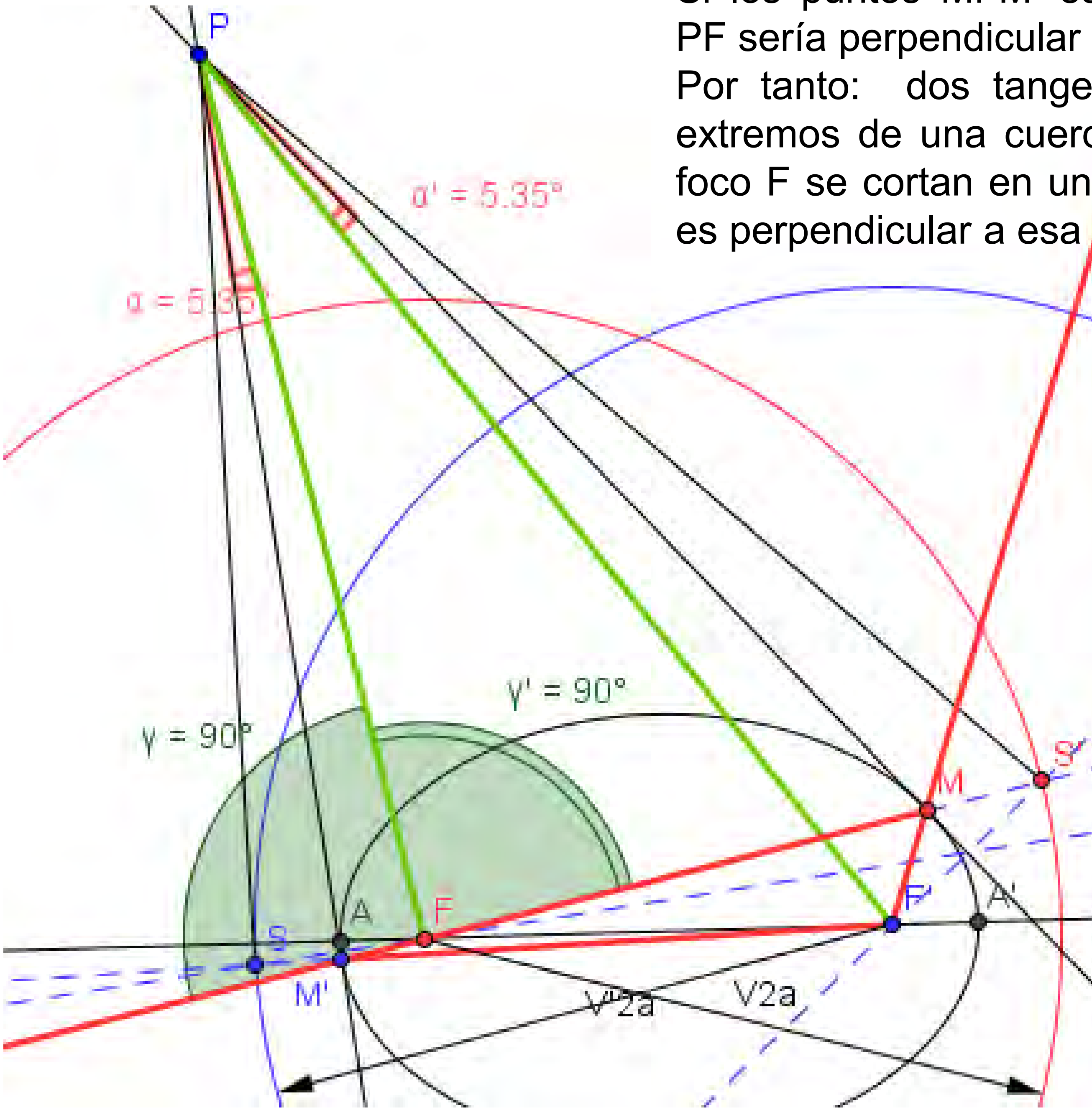
GeoGebra conica_23.ggb

2º teorema: La recta (en verde) que une un punto P con uno de los focos (PF o PF') es bisectriz del ángulo que forman los dos radiovectores (M'FM o M'F'M) de los puntos de contacto (M y M') de las tangentes desde P (PM' y PM) con este foco (F o F').



GeoGebra conica_24.ggb

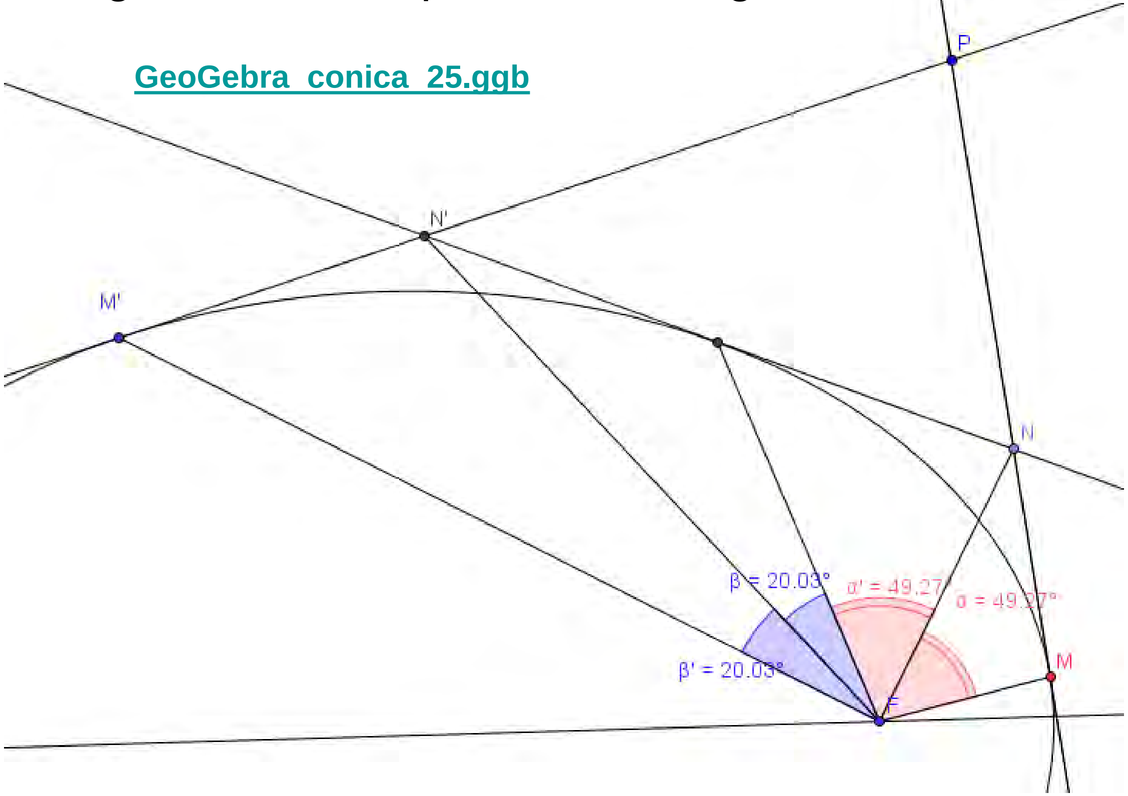
Si los puntos MFM’ estuviesen alineados, PF sería perpendicular a la cuerda MFM’.
Por tanto: dos tangentes en los puntos extremos de una cuerda que pasa por un foco F se cortan en un punto P tal que PF es perpendicular a esa cuerda.



GeoGebra conica_24.ggb

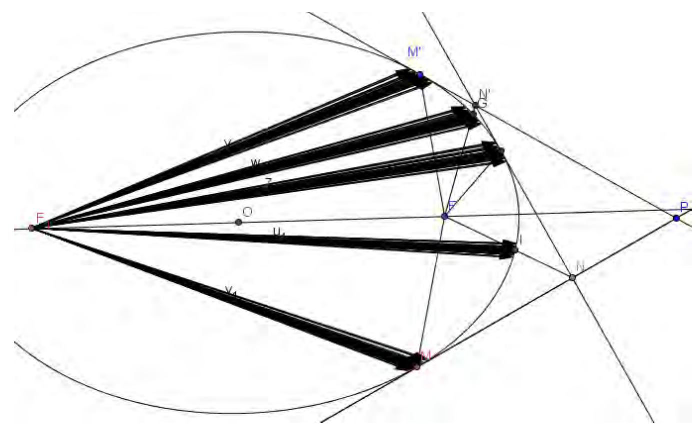
3º teorema: como consecuencia del 2º teorema, una tangente variable corta a dos tangentes fijas de una elipse en dos puntos N’ y N, siendo constante el ángulo desde el que se ve el segmento NN’ desde el foco F.

GeoGebra conica_25.ggb



Patrón-04

La elipse resulta así envolvente de las rectas que unen dos series proyectivas (NF y N’F) sobre bases distintas que son tangentes a la curva (PM’ y PM).



GeoGebra conica_26.ggb